令和７年度専攻科入学者選抜（学力選抜）　数学　試験問題

注意： すべての問題について途中の計算式等も書くこと．メモ用紙は回収しない．

科目	数学	分野	線形代数	1/3	受験番号	

1. 次の 3 点が一直線上にあるように, 定数 a, b の値を定めよ.

$$\mathrm{A}(1,-2,3),\ \mathrm{B}(-3,5,-2),\ \mathrm{C}(5,a,b)$$

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 対角化せよ. 対角化行列も求めること.

科目	数学	分野	微分積分	2/3	受験番号	

3. 関数 $f(x, y) = -x^3 + y^3 + 3x - 3y + 1$ の極値を求めよ．極値をとる x, y の値も明示すること．

4. 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{te^t}$ の解で初期条件「$t = 1$ のとき $x = 0$」を満たすものを求めよ．

科目	数学	分野	微分積分	3/3	受験番号	

5. 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 9x = 5\sin t$ の一般解を求めよ.

6. 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{y}}{x}\,dxdy \qquad D = \left\{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq x^4\right\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{9-4x^2-4y^2}\,dxdy \qquad D = \left\{(x,\ y) \mid x^2+y^2 \leqq 2\right\}$

令和 7 年度専攻科入学者選抜（学力選抜）　数学　試験問題

注意： すべての問題について途中の計算式等も書くこと．メモ用紙は回収しない．

科目	数学	分野	線形代数	1/3	受験番号	解　答

1. 次の 3 点が一直線上にあるように, 定数 a, b の値を定めよ. [10 点]

$$\mathrm{A}(1,-2,3),\ \mathrm{B}(-3,5,-2),\ \mathrm{C}(5,a,b)$$

(解答例) $k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす k が存在する.

$$k(-4,7,-5)=(4,a+2,b-3)$$

を解いて, $k=-1$, $\underline{a=-9,\ b=8}$

2. 行列 $A=\begin{pmatrix}3&-3&1\\3&-5&3\\4&-6&6\end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルを求め, 対角化せよ. 対角化行列も求めること. [15 点]

(解答例) $|A-\lambda E|=-(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-4)$ であるから, 固有値 $\underline{\lambda=-2,2,4}$

(i) $\lambda=-2$ の場合

$A=\begin{pmatrix}5&-3&1\\3&-3&3\\4&-6&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より, $x=z$, $y=2z$. $z=c_1$ とおくと, $\underline{c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\ (c_1\neq 0)}$

(ii) $\lambda=2$ の場合

$A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\3&-7&3\\4&-6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より, $y=0$, $z=-x$. $x=c_2$ とおくと, $\underline{c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\ (c_2\neq 0)}$

(iii) $\lambda=4$ の場合

$A=\begin{pmatrix}-1&-3&1\\3&-9&3\\4&-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ より, $x=0$, $z=3y$. $y=c_3$ とおくと, $\underline{c_3\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\ (c_3\neq 0)}$

$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$ とおくと, $\underline{P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}}$

科目	数学	分野	微分積分	2/3	受験番号	解　答

3. 関数 $f(x,y) = -x^3 + y^3 + 3x - 3y + 1$ の極値を求めよ．極値をとる x, y の値も明示すること． [15 点]

(解答例) $f_x = -3x^2 + 3 = 0$ とすると, $x = \pm 1$. 同様に $f_y = 3y^2 - 3 = 0$ とすると, $y = \pm 1$ である．これより, 極値のとり得る点は

$$(-1,-1),\ (-1,1),\ (1,-1),\ (1,1)$$

である．また, $f_{xx} = -6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = 0$ である．

(i) $(x,y) = (-1,-1)$ の場合

$$H = 6 \times (-6) - 0^2 = -36 < 0$$

となり, 極値をとらない.

(ii) $(x,y) = (-1,1)$ の場合

$$H = 6 \times 6 = 36 > 0,\ f_{xx}(-1,1) = 6 > 0$$

であるから, 極小値 $1 + 1 - 3 - 3 + 1 = \underline{-3}$ をとる.

(iii) $(x,y) = (1,-1)$ の場合

$$H = -6 \times (-6) = 36 > 0,\ f_{xx}(1,-1) = -6 < 0$$

であるから, 極大値 $-1 - 1 + 3 + 3 + 1 = \underline{5}$ をとる.

(iv) $(x,y) = (1,1)$ の場合

$$H = -6 \times 6 - 0^2 = -36 < 0$$

となり, 極値をとらない.

4. 微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t} = \dfrac{1}{te^t}$ の解で初期条件「$t = 1$ のとき $x = 0$」を満たすものを求めよ．[15 点]

(解答例) まず, $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{x}{t} = 0$ を解く．$\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{t}$ の両辺を t で積分すると,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \left(-\frac{1}{t}\right)\, dt \to\ \log|x| = -\log|t| + c_1$$

$$\log|xt| = c_1\ \to\ xt = \pm e^{c_1} = C\ \to\ x = \frac{C}{t}$$

ここで, $x = \dfrac{u}{t}$ (u は t の関数) とおく.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{1}{t} - \frac{u}{t^2}$$

を微分方程式に代入して,

$$\frac{du}{dt}\frac{1}{t} - \frac{u}{t^2} + \frac{u}{t^2} = \frac{1}{te^t} \to \frac{du}{dt} = e^{-t}$$

$$u = -e^{-t} + C\ \to x = \frac{-e^{-t} + C}{t}$$

初期条件 $t = 1$ のとき $x = 0$ であるから, $C = e^{-1}$. 従って, $\underline{x = \dfrac{-e^{-t} + e^{-1}}{t}}$

科目	数学	分野	微分積分	3/3	受験番号	解　　答

5. 微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 9x = 5\sin t$ の一般解を求めよ. [15 点]

(解答例) まず, $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9t = 0$ を解く. 特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 9\lambda = 0$, $(\lambda - 3)^2 = 0$ を解いて, $\lambda = 3$ (重解). よって, $x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}$ (C_1, C_2は定数).

次に微分方程式の 1 つの解を $x = A\sin t + B\cos t$ と予想する.

$$\frac{dx}{dt} = A\cos t - B\sin t, \frac{d^2x}{dt^2} = -A\sin t - B\cos t$$

を代入すると,

$$(-A\sin t - B\cos t) - 6(A\cos t - B\sin t) + 9(A\sin t + B\cos t) = (8A + 6B)\sin t + (-6A + 8B)\cos t$$

係数比較して, $8A + 6B = 5$, $-6A + 8B = 0$ より, $A = \dfrac{2}{5}$, $B = \dfrac{3}{10}$. よって 1 つの解は $x = \dfrac{2}{5}\sin t + \dfrac{3}{10}\cos t$. 従って, 一般解は

$$\underline{x = \frac{2}{5}\sin t + \frac{3}{10}\cos t + (C_1 + C_2 t)e^{3t}}$$

である.

6. 次の二重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{\sqrt{y}}{x}\,dxdy$ 　　 $D = \left\{(x,\ y) \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x^2 \leqq y \leqq x^4\right\}$ [15 点]

(解答例)

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_1^2 \left\{ \int_{x^2}^{x^4} \frac{\sqrt{y}}{x}\ dy \right\}\ dx \\
&= \int_1^2 \left[\frac{2y\sqrt{y}}{3x} \right]_{x^2}^{x^4}\ dx \\
&= \int_1^2 \left(\frac{2}{3}x^5 - \frac{2}{3}x^2 \right)\ dx \\
&= \left[\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{9}x^3 \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{64}{9} - \frac{16}{9} \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{9} \right) \\
&= \underline{\frac{49}{9}}
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{9 - 4x^2 - 4y^2}\,dxdy$ 　　 $D = \left\{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leqq 2\right\}$ [15 点]

(解答例) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおく. $0 \leqq r \leqq \sqrt{2}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $|J| = r$.

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{9 - 4r^2} \cdot r\ dr \right\}\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{12}(9 - 4r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}}\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{12} + \frac{27}{12} \right)\ d\theta \\
&= \underline{\frac{13}{3}\pi}
\end{aligned}$$

令和７年度専攻科入学者選抜（推薦選抜・学力選抜・社会人特別選抜）
「専門科目に関する口頭試問」の内容

卒業研究についての概要説明及び質疑応答を通して，これまで志願者が学修してきた専門分野に関する理解度を確認する。